

**Προτασιακός λογισμός: Κανόνες απόδειξης**

1. Υποθετική απόδειξη (ΥΑ)

p	Υ
.	
.	
.	
q	
<hr/>	
p → q	

2. Modus Ponendo Ponens (MP)

$$\frac{p \quad p \rightarrow q}{q}$$

3. Modus Tollendo Tolens (MT)

$$\frac{\sim q \quad p \rightarrow q}{\sim p}$$

4. Διπλή άρνηση (~~)

p
<hr/>
~~p

5. Εισαγωγή ∧ (ΕισΛ)

p
q
<hr/>
$p \wedge q$

6. Εισαγωγή ∨ (Εισ∨)

p	
q	
<hr/>	
$p \vee q$	ή
p	
<hr/>	
$p \vee q$	ή
q	
<hr/>	
$p \vee q$	

7. Εξαγωγή ∧ (ΕξΛ)

$\frac{p \wedge q}{p} \quad \eta$	
-----------------------------------	--

$p \wedge q$
<hr/>
$q$

8. Εξαγωγή ∨ (Εξ∨)

$p \vee q$
$p \rightarrow r$
$q \rightarrow r$
<hr/>
$r$

9. Εις άτοπον απαγωγή (ΑΑ)

p	
.	
.	
.	
q ∧ ~q	
<hr/>	
~p	

10. Ισοδυναμία (↔)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow p \\ \hline p \leftrightarrow q \end{array}$$

11. Αντικατάσταση ισοδυνάμων (↔)

$\frac{p \leftrightarrow q}{[\dots p \dots]}$	
$[\dots q \dots]$	ή
$\frac{p \leftrightarrow q}{[\dots q \dots]}$	
$[\dots p \dots]$	

**Παραδείγματα:**

{p → q, q → r} ⊢ p → r

1.	p → q	Υ
2.	q → r	Υ
3.	p	Υ
4.	q	1,3 MP
5.	r	2,4 MP
6.	p → r	3-5 ΥΑ

{p → q, r → s} ⊢ (p ∨ r) → (q ∨ s)

1.	p → q	Υ
2.	r → s	Υ
3.	p ∨ r	Υ
4.	p	Υ
5.	q	1,4 MP
6.	q ∨ s	5 Εισ∨
7.	r	Υ
8.	s	2,7 MP
9.	q ∨ s	8 Εισ∨
10.	(p ∨ r) → (q ∨ s)	3-6-9 ΥΑ